ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Εαν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ συμμετρικός και $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ορθογώνιος, τότε νδο:

1) Ο πίνακας $QA + AQ^T$ συμμετρικός
2) $\|QA + AQ^T\|_2 \leq 2\rho(A)$ οπου ρ: η φασματική ακτίνα

ΛΥΣΗ

1) Θδο $(QA+AQ^T)^T = (QA+AQ^T)$

$$(QA+AQ^T)^T = (QA)^T + (AQ^T)^T = A^T \cdot Q^T + Q \cdot A^T =$$

$$\overset{\text{Υπόθεση}}{=} A \cdot Q^T + Q \cdot A = QA + AQ^T.$$

2) $\|QA + AQ^T\|_2 \overset{\text{νόρμα}}{\leq} \|QA\|_2 + \|AQ^T\|_2 =$

$= \rho((QA)^T QA)^{1/2} + \rho((AQ^T)^T \cdot AQ^T)^{1/2} =$

$= \rho(A^T Q^T Q A)^{1/2} + \rho(Q \cdot A^T \cdot A \cdot Q^T)^{1/2} =$

$\overset{\text{Ορθ.}}{\underset{\text{Ασυμ}}{=}} \rho(A^T \cdot A)^{1/2} + \rho(Q \cdot A^2 \cdot Q^T)^{1/2} =$

$\overset{\text{Ασυμ.}}{=} \rho(A^2)^{1/2} + \rho(QA^2Q^T)^{1/2} \overset{\circledast}{\underset{\circledast\circledast}{=}}$

$= (\rho(A)^2)^{1/2} + \rho(A^2)^{1/2} =$

$= \rho(A) + \rho(A) = 2\rho(A)$

$\circledast$ $\rho(A^2)^{1/2} = (\rho(A)^2)^{1/2}$

Αποδ.

$Ax = \lambda x$, λ ιδιοτ. του A

$A^T A x = \lambda A^T x \Rightarrow A^2 x = \lambda A x \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 x = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda^2$ ιδιοτ. του A^2

Έτσι,

$\rho(A^2) = \lambda^2 = \rho(A)^2$

Συνεπώς

$\rho(A^2)^{1/2} = (\rho(A)^2)^{1/2} = \rho(A)$

$\circledast\circledast$ Οι πίνακες A^2 και QA^2Q^T είναι όμοιοι μεταξύ τους. Διότι $\exists Q$ $QA^2Q^{-1} = QA^2Q^T \Rightarrow$

$\overset{\text{Ορθ.}}{\Rightarrow} QA^2Q^T = QA^2Q^T$ ισχύει. Έτσι, θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Και άρα $\rho(A^2) = \rho(QA^2Q^T)$

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η περιοχή για το $a\in\mathbb{R}$, ώστε A θετικά ορισμένος και στη συνέχεια ποιος ο αντίστροφος του πίνακα A για $\alpha=5$ χρησιμοποιώντας την ανάλυση cholesky

ΛΥΣΗ

Έστω A θετικά ορισμένος, τότε:

$\det 1 = 1 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow a-1>0 \Rightarrow a>1$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2a-4+(-2-0) = 2a-6>0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a>3$$

Άρα, για $a\in(3,\infty)$ ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος

Εφαρμόζουμε την ανάλυση cholesky: για $\alpha=5$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix} = L\cdot L^T$$

$\ell_{11}^2 = 1 \Rightarrow \ell_{11}=1$, $\ell_{21}=-1$, $\ell_{31}=0$, $\ell_{21}^2+\ell_{22}^2=5 \Rightarrow \ell_{22}=2$

$\ell_{21}\ell_{31}+\ell_{22}\ell_{32}=-2 \Rightarrow -1\cdot 0+2\cdot\ell_{32}=-2 \Rightarrow \ell_{32}=-1$

$\ell_{31}^2+\ell_{32}^2+\ell_{33}^2=2 \Rightarrow 0+1+\ell_{33}^2=2 \Rightarrow \ell_{33}=1$

Άρα, $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = L \cdot L^T \Rightarrow A^{-1} = (L \cdot L^T)^{-1} = (L^T)^{-1} \cdot L^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1}.$$

$$L \cdot L^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (L^{-1})^T \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ένας β' τρόπος είναι:

$$Ax = I \Rightarrow L \cdot L^T x = I \Rightarrow \begin{cases} L y = I & (1) \\ L^T x = y & (2) \end{cases}$$

(1): $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 1, & y_{12} = 0, & y_{13} = 0 \\ y_{21} = \frac{1}{2}, & y_{22} = \frac{1}{2}, & y_{23} = 0 \\ y_{31} = \frac{1}{2}, & y_{32} = \frac{1}{2}, & y_{33} = 1 \end{cases}$$

②: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{31} = \frac{1}{2}, \ x_{32} = \frac{1}{2}, \ x_{33} = 1 \\ 2x_{21} - x_{31} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_{21} = 1 \Rightarrow x_{21} = \frac{1}{2} \\ 2x_{22} - x_{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{22} = \frac{1}{2} \\ 2x_{23} - x_{33} = 0 \Rightarrow x_{23} = \frac{1}{2} \\ x_{11} - x_{21} = 1 \Rightarrow x_{11} = \frac{3}{2} \\ x_{12} - x_{22} = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{1}{2} \\ x_{13} - x_{23} = 0 \Rightarrow x_{13} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω γραμμικό σύστημα $Ax=b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Διαχωρισμός } A = D - L - U)$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ τους:

i) Η μέθοδος Jacobi

ii) Η μέθοδος Gauss-Seidel

iii) Η βελτιωμένη μέθοδος (παρεκβολής) της Gauss-Seidel

ΛΥΣΗ

i) $T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(T_j - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{2} = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\, i, \quad \rho(T_j) = \frac{2}{3} < 1 \text{ συγκλίνει}$$

a) $T_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

$$(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \overset{X}{\overset{\|}{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Άρα, $\det(T_{GS} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{6}-\lambda\right) + \frac{1}{12}\right) =$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{12} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{6} - \lambda^2\right) - \frac{\lambda}{12} = -\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{3} = \lambda^2\left(-\lambda + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{3}, \quad \rho(T_{GS}) = \frac{1}{3} < 1$$

iii) $w \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) = \left(0, \frac{2}{1-0}\right) = \left(0, \frac{2}{1}\right) = (0, 2)$

$$W_B = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{2}{2-\left(\frac{1}{3}+0\right)} = \frac{2}{2-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$$

και $\rho(T_{W_B}) = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{5}{\cancel{3}}} = \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 4º

α) Ν.δ.ο. δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k)}$ και $r^{(k+1)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια.

β) Να βρεθεί η ακριβής λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ όπου:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων και αρχικό διάνυσμα $x^{(0)}=0$ (Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς).

ΛΥΣΗ

α) $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A\left(x^{(k)} + a_{k+1} r^{(k)}\right) =$

$= b - Ax^{(k)} - a_{k+1} \cdot A r^{(k)} = r^{(k)} - a_{k+1} \cdot A \cdot r^{(k)}$.

Έτσι,

$\left(r^{(k)}, r^{(k+1)}\right) = \left(r^{(k)}, r^{(k)} - a_{k+1} A r^{(k)}\right) =$

$= \left(r^{(k)}, r^{(k)}\right) - a_{k+1} \cdot \left(A r^{(k)}, r^{(k)}\right) =$

$= \cancel{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)} - \dfrac{\cancel{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}}{\cancel{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)}} \cancel{\left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)} = 0$

β) $x^{(0)} = 0$, $r^{(0)} = b$, $p^{(1)} = r^{(0)} = b$

$Ap^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_1 = \dfrac{\left(r^{(0)}, r^{(0)}\right)}{\left(Ap^{(1)}, p^{(1)}\right)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$x^{(1)} = x^{(0)} + a_1 p^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_1 Ap^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(k < 3)$

$k = k+1$

$$b_2 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(r^{(0)}, r^{(0)})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p^{(2)} = r^{(1)} + b_2 p^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \\ 1 + (-1) \\ 1 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$Ap^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(Ap^{(2)}, p^{(2)})} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + a_2 p^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 + 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r^{(2)} = r^{(1)} - a_2 A \cdot p^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αναμενόμενο να είναι το μηδενικό διάνυσμα αφού ο αλγόριθμος έφτασε $k=3 \not< 3$ τερματίζεται

ΘΕΜΑ 5ο

Να λυθεί το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

$\min_x \|b-Ax\|_2$ όπου:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

με το σύστημα κανονικών εξισώσεων.

Έπειτα, να λυθεί ξανά με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt.

ΛΥΣΗ

$$Ax=b \Leftrightarrow A^T\cdot Ax = A^T\cdot b \quad ①$$

με $$A^T\cdot b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}_{3\times4} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T\cdot A = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -9 & 18 & -9 \\ 0 & -9 & 18 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{12} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{23} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1,2,3]{\ell_{ii}>0}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11}=3, \quad \ell_{11}\cdot\ell_{12} = -9 \Rightarrow \ell_{12}=-3, \quad \ell_{13}=0 \\ \ell_{12}^2+\ell_{22}^2 = 18 \Rightarrow \ell_{22}=3, \quad \overset{-3}{\ell_{12}}\cdot\overset{0}{\ell_{13}}+\overset{3}{\ell_{22}}\cdot\ell_{23} = -9 \Rightarrow \ell_{23}=-3 \\ \ell_{13}^2+\ell_{23}^2+\ell_{33}^2 = 18 \Rightarrow \ell_{33}=3 \end{cases}$$

Άρα, $$A^T\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$①: \ L\cdot \underbrace{L^T x}_{y} = A^T\cdot b \Leftrightarrow \begin{cases} L\cdot y = A^T\cdot b & ② \\ L^T x = y & ③ \end{cases}$$

② : $Ly = A^T \cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow y^T = [0, 3, 3]$

③ : $L^T \cdot x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x^T = [2, 2, 1]$.

Έτσι, $b - Ax = \begin{bmatrix} 3-3 \\ -2-2 \\ -2-2 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|r_x\| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

⊛ Επιπλέον ερώτημα: Να δειχθεί ότι:

$\|Qx\|_2 = \|x\|_2, \ \forall x \in \mathbb{C}^4$

<u>Αποδ.</u>

$\|Qx\|_2^2 = (Qx, Qx)_2 = (x, Q^T Q x)_2 \overset{Q \text{ ορθ}}{=} (x, x)_2 = \|x\|_2^2$

Εκτελώντας, τώρα τον αλγόριθμο Gram-schmidt

$q^{(1)} = a_1 = (2, 1, 2, 0)^T$, $r_{11} = \|q^{(1)}\| = \sqrt{9} = 3$

$q^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{r_{11}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)^T \leftarrow$

$q^{(2)} = a_2 = (-1, -3, -2, 2)^T$, $r_{12} = (q^{(1)}, q^{(2)}) = -3$

$q^{(2)} = q^{(2)} - r_{12} \cdot q^{(1)} = (1, -2, 0, 2)^T$

$r_{22} = \|q^{(2)}\| = \sqrt{9} = 3$, $q^{(2)} = \frac{q^{(2)}}{r_{22}} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)^T \leftarrow$

$q^{(3)} = a_3 = (1,2,-2,-3)^T$, $r_{13} = (q^{(1)}, q^{(3)}) = 0$

$q^{(3)} = q^{(3)} - \cancel{r_{13} q^{(1)}} = q^{(3)} = (1,2,-2,-3)^T$.

$r_{23} = (q^{(2)}, q^{(3)}) = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - 2 = -3$

$q^{(3)} = q^{(3)} - r_{23} q^{(2)} = (2,0,-2,-1)^T$

$r_{33} = \|q^{(3)}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $q^{(3)} = \frac{q^{(3)}}{r_{33}} = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}}, 0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

Άρα, $Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T \cdot b$ ①

όπου

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Έτσι, η ① γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{3\sqrt{2}}\, x_3 = \frac{\cancel{3\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \\ 3x_2 - 3x_3 = 3 \Rightarrow 3x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \\ 3x_1 - 3x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \frac{27-2}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{25}{18} \end{cases}$$

Άρα, $x^T = \left[\frac{25}{18}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

κανονικά πρέπει το x^T της 1ης διαδικασίας να συμπίπτει με το x^T της 2ης αλλά λόγω αριθμητικών λαθών βγαίνουν διαφορετικά

$\|r_x\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \dots$

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέσω της μεθόδου αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και το αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1,0,1)^T$ να γίνουν 2 επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. Η λύση να γίνει με την LU ανάλυση.

ΛΥΣΗ

Μικρότερη απόλυτα ιδιοτιμή $\rightsquigarrow \sigma=0$

Τότε $(A-I\sigma)y^{(k)} = x^{(k-1)} \overset{\sigma=0}{\Longrightarrow} Ay^{(k)} = x^{(k-1)}$

Εφαρμόζουμε μέθοδο Gauss και έπειτα LU παραγοντοποίηση

$$\begin{array}{c|ccc} 0,(-1) & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ (-\frac{1}{2}) & 0 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 \\ & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Έτσι, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$LU\,y^{(k)} = x^{(k-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} L\,z^{(k)} = x^{(k-1)} & ① \\ U\,y^{(k)} = z^{(k)} & ② \end{cases}$$

Για $k=1$:

$$\begin{cases} L\,z^{(1)} = x^{(0)} & ①' \\ U\,y^{(1)} = z^{(1)} & ②' \end{cases}$$

①': $z^{(1)} = (1,-1,\frac{3}{2})$ και ②': $y^{(1)} = (3,-2,3)^T$

Τότε από αλγόριθμο αντίστροφων δυνάμεων

$x^{(1)} = \dfrac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_\infty} = (1,-\frac{2}{3},1)$, $\mu^{(0)} = \dfrac{y_i^{(1)}}{x_i^{(0)}}$, με $i: \|x^{(0)}\|_\infty = 1$

άρα μας κάνει για $i=1$ (ή $i=3$)

Έστω για $i=1$: $\mu^{(0)} = \dfrac{y_1^{(1)}}{x_1^{(0)}} = \dfrac{3}{1} = 3$, $\lambda^{(0)} = \dfrac{1}{\mu^{(0)}} + 0 = \dfrac{1}{3}$.

Για $k=2$

$$\begin{cases} L\,z^{(2)} = x^{(1)} & ①'' \\ U\,y^{(2)} = z^{(1)} & ②'' \end{cases}$$

①'': $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \\ z_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z^{(2)} = (1,-\frac{5}{3},\frac{11}{6})^T$.

$$\frac{1}{2} z_2^{(2)} + z_3^{(2)} = 1 \Rightarrow z_3^{(2)} = 1 + \frac{5}{6} \Rightarrow z_3^{(2)} = \frac{11}{6}$$

②'': $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix} \Leftrightarrow y^{(2)} = \left[\frac{11}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right]^T$

Έτσι, από αλγόριθμο αντίστροφων δυνάμεων

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_\infty} = \frac{\left(\frac{11}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)}{\frac{11}{3}} = \left(1, -\frac{8}{11}, 1\right)$$

$\mu^{(1)} = \dfrac{y_i^{(2)}}{x_i^{(1)}}$, $i : \|x^{(1)}\|_\infty = 1$ (μας κάνει η $i=1$ (ή $i=3$))

άρα $\mu^{(1)} = \dfrac{y_1^{(2)}}{x_1^{(1)}} = \dfrac{11/3}{1} = \dfrac{11}{3}$, $\lambda^{(1)} = \dfrac{1}{\mu^{(1)}} = \dfrac{3}{11}$.